

稀疏性正则化的图像泊松去噪算法

孙玉宝^{1,2}, 韦志辉¹, 吴敏¹, 肖亮¹, 费选¹

(1. 南京理工大学计算机科学与技术学院, 模式识别与智能系统实验室, 江苏南京 210094;

2. 总参谋部第六十研究所, 江苏南京 210016)

摘要: 去除医学、天文图像中的泊松噪声是一个重要问题, 基于图像在过完备字典下的稀疏表示, 在 Bayesian-MAP 框架下建立了稀疏性正则化的图像泊松去噪凸变分模型, 采用负 log 的泊松似然函数作为模型的数据保真项, 模型中非光滑的正则项约束图像表示系数的稀疏性, 并附加非负性约束, 保证去噪图像的非负性. 基于分裂 Bregman 方法, 提出了数值求解该模型的多步迭代快速算法, 通过引入辅助变量与 Bregman 距离可将原问题转化为两个简单子问题的迭代求解, 降低了计算复杂性. 实验结果验证了本文模型与数值算法的有效性.

关键词: 图像去噪; 稀疏表示; 泊松噪声; 分裂 Bregman 算法; 邻近算子

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2011) 02-0285-06

Image Poisson Denoising Using Sparse Representations

SUN Yu-bao^{1,2}, WEI Zhi-hui¹, WU Min¹, XIAO Liang¹, FEI Xuan¹

(1. *Laboratory of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, Institute of Computer Science and Technology,*

University of Science and Technology, Nanjing, Jiangsu 210094, China;

2. *The 60th Research Institute of the PLA General Staff Headquarters, Nanjing, Jiangsu 210016, China)*

Abstract: The removal of Poisson noise is essential in medical and astronomical imaging. In the framework of Bayesian-MAP estimation, a sparsity regularized convex functional model is proposed to denoise Poisson noisy image in terms of the sparse representation of the underlying image in an over-complete dictionary. The negative-log Poisson likelihood functional is used for data fidelity term and non-smooth regularization term constrains the sparse representations of the underlying image over the dictionary. An additional term is also added in the functional to ensure the non-negative of the denoised image. Based on the Split Bergman iteration method, a multi-step fast iterative algorithm is proposed to solve the above model numerically. By introducing an intermediate variable and Bergman distance, the original problem is transformed into solving two simple sub-problems iteratively, thus the computational complexity is decreased rapidly. Experimental results demonstrate the effectiveness of our recovery model and the numerical iteration algorithm.

Key words: image denoising; sparse representation; Poisson noise; split Bergman method; proximal operator

1 引言

图像去噪是图像处理中的基本问题, 目标是从含噪的观测图像估计出理想图像, 通常这是一个不适定的反问题, 大量文献对该问题进行了深入的研究, 不过主要针对的是加性高斯白噪声, 然而在光子计数成像系统中, 如 CCD 固态光电探测器阵列、天文成像、计算 X 射线成像 (CR)、荧光共焦显微成像等等, 获取的图像往往受到量子噪声的污染, 量子噪声服从泊松分布的统计法则, 并非加性噪声, 且噪声强度与方差是信号依赖的, 统计上, 亮度大的像素受到更多的干扰, 因此去除泊松噪声是一个困难的任务. 去除泊松噪声的一个经典方法是对观测数据在空域或变换域 (如小波) 进行 VS 变换

(Variance Stabilization Transform), 例如 Anscombe、Haar-Fisz、CVS 变换等等^[1], 变换后各数据为近似同方差的高斯分布, 从而转化为一般的高斯去噪问题. 诸多算法如维纳滤波、小波阈值收缩均可应用于该问题^[2,3], 最后经反 VS 变换可获得最终的去噪数据, 文献[4]基于此思路, 结合多尺度几何变换, 取得了较好的实验结果. 不过, 只有当光子数逐渐变多时, VS 变换后数据才渐进趋于高斯分布, 并不适用于低光子数情形, 如 X-Ray、Gamma 射线数据, 同时 VS 变换为非线性变换, 不利于分析与优化去噪算法的性能.

实际应用需要更为有效的泊松去噪方法, 无需进行 VS 变换预处理, 能够直接分析泊松数据. 对含噪图像的小波变换系数进行与泊松噪声统计特性相适应的阈

收稿日期: 2009-10-14; 修回日期: 2010-03-20

基金项目: 国家 863 高技术研究发展计划 (No. 2007AA12Z142); 国家自然科学基金 (No. 61071146, No. 60802039, No. 60672074); 高等学校博士点专项基金 (No. 200802880018); 江苏省自然科学基金 (No. SBK201022367); 南京理工大学研究基金 (No. 2010ZDJH07)

值操作,可避免 VS 变换.为此,针对泊松噪声的统计特性,Kolaczyk 修正了原先针对高斯噪声的小波系数阈值策略,不过在低光子数情形下仍然不是很有效.随后 Kolaczyk 提出了另外一种算法,通过统计假设检验(hypothesis-testing)策略^[5],可预先设定误检率,对 Haar 小波系数一致性(重要性)进行判别,并进行相应的阈值操作.进一步将该方法拓展到双正交 Haar 小波,可形成更为光滑的去噪图像.文献[6]推导出了一般小波系数的概率密度函数(PDF),从而可将假设检验策略应用于任意的小波基,不过该 PDF 并没有显式的表达式,同时计算复杂性高.

另一类方法是在多尺度 Bayesian 框架下处理泊松噪声. Bayesian 方法的优点是在去噪过程中可结合关于理想图像的先验知识,同时利用多尺度分析可简化去噪问题,得到了学者们的认可.文献[7]对泊松似然函数进行多尺度分解,同时通过先验概率分布来约束解的正则性,应用 EM 算法求解最大化的后验概率.文献[8]将泊松去噪问题形式化为惩罚的最大似然估计问题,通过最小化惩罚的似然函数达到对图像的最优二叉树修剪,进而可对每一树节点形成多尺度的估计.

本文提出了一种新的去噪模型,无需进行 VS 变换,能够直接对泊松噪声进行处理.基于图像的稀疏表示先验知识,在 Bayesian-MAP 框架下,建立了图像泊松去噪的凸变分模型.针对泊松噪声采用负 log 的泊松似然函数作为数据保真项,能够自适应于泊松噪声的统计特性.模型中非光滑的正则项约束图像在冗余字典下分解系数的稀疏性,用于稀疏分解的字典应能够有效匹配图像中的局部几何结构,从而有利于恢复图像中重要结构成份.综合考虑本文凸变分模型的特点,基于分裂 Bregman 迭代方法^[9],提出了求解该模型的多步迭代快速算法,通过引入中间变量与 Bregman 距离,将原问题转化为两个简单子问题的迭代求解,大幅度降低了计算复杂性.对一些仿真与实测图像进行了实验验证,并同上述多种方法进行了比较.实验结果表明:由于采用同泊松噪声统计特性相适应的保真项与匹配图像几何结构特征的稀疏性正则项,改善了图像恢复结果,验证了本文模型与数值算法的有效性.

2 稀疏性正则化的泊松噪声图像去噪模型

2.1 稀疏表示图像模型

依据计算调和理论,图像 $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^N$ 可表示为一组原子 $\{\phi_i\}_{i \in I}$ 的线性组合,将 I 个原子作为列向量形成字典 $\Phi \in \mathbf{R}^{N \times I}$,从而图像 \mathbf{u} 可表示为:

$$\mathbf{u} = \Phi \boldsymbol{\alpha} \quad (1)$$

$I = \{1, \dots, I\} (I \in N)$ 为原子参数指标集(为有限集合),图像的稀疏表示理论认为在合适的字典 Φ 下图像 \mathbf{u} 总

存在稀疏的表示,即要求系数 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i)_{i \in I}$ 中只有很少的非零元素: $\|\boldsymbol{\alpha}\|_0 \ll N$. 图像的过完备稀疏表示是一个新兴的图像模型,能够有效地刻画信号的内在结构与特征,在图像去噪、去模糊、修补等众多领域取得非常好的应用^[10].

目前所涉及的图像稀疏表示字典主要有三类:正交系统,框架、过完备字典.传统地,通常采用傅立叶变换、DCT 变换以及小波变换等非冗余的字典(正交系统)对图像形成表示,现代计算调和与分析研究表明,冗余的(紧)框架系统有利于形成稀疏表示.如 M 个正交基的级联即可构成一个紧框架,此外平移不变小波、Curvelet 也可构成 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 的紧框架.稀疏表示理论表明进一步增加表示系统的冗余性形成过完备字典可对图像形成更为稀疏的表示,通常情况下可通过组合现有的正交基或框架来构造,也可通过设计参数化的生成函数,变换其自由参数生成整个字典,如 Gabor 感知多成份字典、AR-Gauss 混合字典等等.针对具体的应用场合,还可通过学习或训练算法来获取字典.

2.2 稀疏性正则化的去噪模型

记 $\mathbf{u} = \{u_{i,j}; i, j = 1, \dots, N\}$ 为原始理想图像, $\mathbf{z} = \{z_{i,j}; i, j = 1, \dots, N\}$ 为被泊松噪声污染后的噪声图像,图像 \mathbf{z} 中每一个像素 $z_{i,j}$ 皆为独立且均值为 $u_{i,j}$ 的 Poisson 随机变量的实现.依据泊松分布的定义,要求均值 $u_{i,j} > 0$. 因此给定理想图像 \mathbf{u} 时,观测图像 \mathbf{z} 的泊松似然概率分布为:

$$p(\mathbf{z} | \mathbf{u}) = \prod_{i,j=1}^N \frac{u_{i,j}^{z_{i,j}} \exp(-u_{i,j})}{z_{i,j}!} \quad (2)$$

借助于信号在冗余字典下的线性展开(1),似然概率分布可改写为:

$$p(\mathbf{z} | \mathbf{u} = \Phi \boldsymbol{\alpha}) = \prod_{i,j=1}^N \frac{[\Phi \boldsymbol{\alpha}]_{i,j}^{z_{i,j}} \exp(-[\Phi \boldsymbol{\alpha}]_{i,j})}{z_{i,j}!} \quad (3)$$

图像去噪的任务是从观测图像 \mathbf{z} 恢复出理想图像 \mathbf{u} ,由于用于问题求解的信息量不足,这是一个不适定(ill-posed)的反问题.在 Bayesian 统计框架下充分利用理想图像的先验知识有利于改善问题性质.基于图像 \mathbf{u} 在冗余字典 Φ 下的稀疏表示先验知识,假设稀疏表示系数 $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ 相互独立,且系数 $\boldsymbol{\alpha}$ 应满足如下的 Gibbs 分布:

$$p(\boldsymbol{\alpha}) \sim \exp(-\lambda \sum_{i=1}^I \phi_i(\alpha_i)) \quad (4)$$

为了满足稀疏性要求,系数在零点聚集出现, $p(\boldsymbol{\alpha})$ 通常应是非高斯的重尾分布,例如拉普拉斯分布、广义高斯分布等分布可有效匹配系数的这一分布特性.例如当 $\phi_i(\alpha_i) = |\alpha_i|$ 时,体现为拉普拉斯分布,更多的非高斯分布不再一一列举.由贝叶斯-最大后验概率估计(Bayesian-MAP)可建立如下关于稀疏表示系数 $\boldsymbol{\alpha}$ 的泊

松去噪变分模型:

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha} -\ln(p(z|u = \Phi\alpha)) - \lambda \ln p(\alpha) \quad (5)$$

第一项为泊松似然分布,第二项为系数 α 的先验分布. 为了符合泊松分布均值非负的特性,应增加对 $\Phi\alpha$ (均值) 的非负性约束. 进一步将式(3)与式(4)代入并简化后,式(5)可表示为:

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha} \sum_{i,j=1}^N ([\Phi\alpha]_{i,j} - z_{i,j} \ln[\Phi\alpha]_{i,j}) + \iota_C(\Phi\alpha) + \lambda \sum_{i=1}^I \psi_i(\alpha_i) \quad (6)$$

其中, $\{\psi_i(\alpha_i)\}_{i \in I}$ 为稀疏性惩罚函数, $I = \{1, \dots, I\}$ ($I \in N$), ι_C 为凸集 C 的示性函数, 定义为:

$$\iota_C(x) = \begin{cases} 0, & x \in C \\ +\infty, & x \notin C \end{cases}, C = C_1 \times \dots \times C_I \quad (7)$$

为了符合泊松分布均值非负的特性,选取凸集 $C_{1 \leq i \leq I} = \{x \in L^2(R) | x\} \geq 0\}$, 约束均值 $\Phi\alpha$ 的非负性,从而也保证了去噪后图像灰度值的非负性. 目标泛函中综合了关于原子系数的稀疏性约束和数据保真信息, λ 为正则化参数,在正则项与保真项之间相互权衡,最小化此能量目标泛函,可恢复理想图像为

$$u^* = \Phi\alpha^* \quad (8)$$

为了重建模型的便于求解,要求稀疏性惩罚函数 $\{\psi_i(\alpha_i)\}_{i \in I}$ 为闭的下半连续凸函数. 同时为了有效度量框架系数的稀疏性,要求其满足下面的条件:

ψ_i 为偶对称的连续非负函数,在 $[0, +\infty)$ 上非递减,且 $\psi_i(0) = 0$ ($i \in I$)

但对其并无光滑性要求,从而可选择更为广泛的稀疏性惩罚函数. 其实,当前广泛采用的稀疏性惩罚函数通常是非光滑的,如 l_1 范数.

目标泛函(6)中每一项关于问题变量 α 均是凸的,因而整个式(6)为凸变分模型,同时也是强制的(coercive),因此变分问题(6)的解一定存在. 如果进一步 $\psi_{1 \leq i \leq I}$ 为严格凸函数,则目标泛函为严格凸的,从而变分问题(6)存在唯一解.

3 分裂 Bregman 迭代快速算法

文献[9]提出使用分裂 Bregman 方法快速求解全变差(Total Variation: TV)正则化的图像恢复问题,成功地解决了一直困扰 TV 模型的计算复杂度高问题. 该算法在基于框架的图像恢复问题中也得到了很好的应用. 分裂 Bregman 方法的目的是扩展 Bregman 迭代^[11]与线性化 Bregman 迭代^[12]的效用范围,从而能够有效求解更为广泛的问题. 其基本思想是引入一个辅助变量,替换原目标泛函中较难处理部分,如不可分离项、非光滑项、非线性项等等,从而简化问题的求解,并添加辅助变量与替换部分之间的等式约束,保证新问题与原问

题等同,继而应用 Bregman 迭代对新问题进行求解. 本文将采用分裂 Bregman 算法数值求解凸变分模型(6). 由于目标泛函(6)中前两项关于问题变量 α 是不可微且不可分离的,同时泊松似然函数为非二次函数,是模型中较难处理的部分. 记函数 $\psi(\alpha) = \sum_{i=1}^I \psi_i(\alpha_i)$, 令 $\Phi\alpha = b$, 并添加等式约束,从而原问题(6)等同于下面的新变分问题:

$$\min \sum_{i,j=1}^N b_{i,j} - z_{i,j} \ln b_{i,j} + \iota_C(b) + \lambda \Psi(\alpha) \quad (9)$$

s. t. $b = \Phi\alpha$

将 $\Phi\alpha$ 从较难处理的非二次泊松似然函数中分离出来,使其关于 b 是可分离的,从而可简化问题的求解. 下面继续应用 Bregman 迭代求解新的变分问题(9),通过对(9)式中的目标函数引入 Bregman 距离,可将原问题转化为无约束子问题的迭代求解和 Bregman 参数 p 的更新过程. 令 $\alpha^0 = 0, b^0 = 0, p^0 = 0$, 最终的 Bregman 迭代公式如下:

$$\begin{cases} (\alpha^{k+1}, b^{k+1}) = \arg \min_{\alpha, b} \sum_{i,j=1}^N b_{i,j} - z_{i,j} \ln b_{i,j} + \iota_C(b) \\ \quad + \lambda \Psi(\alpha) + \frac{1}{2\gamma} \|\Phi\alpha - b + p^k\|_2^2 \\ p^{k+1} = p^k + (\Phi\alpha^{k+1} - b^{k+1}) \end{cases} \quad (10)$$

式中常数 $\gamma > 0$, 具体的推导过程不再给出,详细内容请参见文献[11]. 与传统的求解等式约束优化问题的惩罚函数与序贯策略(continuation method)相比, Bregman 迭代具有收敛速度快与数值稳定性好的优点. 相关文献指出如果能够准确求解迭代公式(10)中的第一个子问题,迭代公式(10)能够保证解的收敛性. 实际应用中准确求解第一个子问题并不是一件容易的事,本文采用交替最小化算法进行求解,当仅交替迭代一次时,可获得如下迭代算法:

$$\begin{cases} \alpha^{k+1} = \arg \min_{\alpha} \lambda \Psi(\alpha) + \frac{1}{2\gamma} \|\Phi\alpha - b^k + p^k\|_2^2 \\ b^{k+1} = \arg \min_b \sum_{i,j=1}^N b_{i,j} - z_{i,j} \ln b_{i,j} + \iota_C(b) \\ \quad + \frac{1}{2\gamma} \|b - \Phi\alpha^{k+1} - p^k\|_2^2 \\ p^{k+1} = p^k + (\Phi\alpha^{k+1} - b^{k+1}) \end{cases} \quad (11)$$

事实上,文献[9]已经运用 Douglas-Rachford 极大单调算子分裂与对偶理论证明: 尽管第一个子问题内部仅迭代一次,算法(11)仍然是收敛的. 公式(11)可将原问题解耦,把原问题的正则项与保真项分裂在两个子问题中,从而大幅度简化了原问题的求解,最后一个子步对 Bregman 参数 p 进行更新,无需迭代,直接计算即可,整个算法的复杂度主要由前两个子问题决定.

式(11)中第一个子问题可理解为变换域中稀疏性正则化的高斯去噪问题,目标泛函中 $\Psi(\alpha)$ 关于 α 是可分离的,同时第二项关于 α 是可微的,因而可采用线性化 Bregman 迭代进行快速求解^[12],该方法在采纳 Bregman 迭代框架的同时,对二次项在当前点处进行泰勒展开,并作一次逼近,将其线性化,从而使得简化后的目标泛函对关于问题变量 α 是可分离,可单独处理每一分量,大大简化问题的求解,最终的迭代公式表示为:

$$\begin{cases} \mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n + \frac{1}{\gamma} \Phi^T(\mathbf{b}^k - \Phi \tilde{\alpha}^n - \mathbf{p}^k) \\ \tilde{\alpha}^{n+1} = \lambda \Psi(\alpha) + \frac{1}{2\beta} \|\alpha - \beta \mathbf{v}^{n+1}\|_2^2 \end{cases} \quad (12)$$

其中, n 为该子问题的内部迭代次数, $\beta > 0$. 设置 $\mathbf{v}^0 = 0$, 选择当前迭代 α^k 作为初始迭代点 $\tilde{\alpha}^0$. 作者在文献[13]中指出如果 Ψ 满足适当的条件时,式(12)中的第一个子问题存在唯一解,且对每一分量具有可分离形式. 当稀疏性度量函数 Ψ 为 l^1 范数时,最优解对应的是软阈值操作, $\tilde{\alpha}^{n+1} = \beta \text{shrink}(\mathbf{v}^{n+1}, \lambda)$, 即为著名的向量软阈值收缩,分量(标量)形式为:

$$(\text{shrink}(v^n, \lambda))_i = \begin{cases} v_i^n - \lambda, & v_i^n \in (\lambda, +\infty) \\ 0, & v_i^n \in [-\lambda, \lambda] \\ v_i^n + \lambda, & v_i^n \in (-\infty, -\lambda) \end{cases} \quad (13)$$

可以发现,公式(12)非常容易实现,仅需矩阵向量的乘积与标量收缩操作(l_1 范数),本文中矩阵向量的乘积可通过快速算法实现,如小波变换(时间复杂度为 $O(N)$)、平移不变小波、Ridgelet 与 Curvlet 变换(时间复杂度为 $O(N \log N)$)等等,同时线性化 Bregman 方法收敛速度快,只需少数几次迭代即可获得很好的恢复结果,从而整个子问题求解具有较低的时间复杂度.

在分析式(11)中第二个子问题之前,先介绍邻近算子的概念. Moreau 将凸投影算子进行推广,于 1962 年首先提出了邻近算子的概念. 令 f 为实希尔伯特空间 H 上的下半连续凸函数,给定 $\gamma > 0$, 函数 f 的邻近算子定义为:

$$\text{prox}_{\gamma f}: H \rightarrow H: x \rightarrow \arg \min_{y \in H} f(y) + \frac{1}{2\gamma} \|y - x\|_2^2 \quad (14)$$

$\text{prox}_{\gamma, f}$ 为上述变分的唯一解. 如果取 $f(y) = \iota_C(y)$, 此时 $\text{prox}_{\iota_C} x = P_C x$, 即为凸集 C 的投影算子. 记 $\varphi(\mathbf{b}) = \sum_{i,j=1}^N b_{i,j} - z_{i,j} \ln b_{i,j}$, 借助于邻近算子的概念,式(11)中的第二个子问题等价于:

$$\mathbf{b}^{k+1} = \text{prox}_{\gamma\varphi + \iota_C}(\Phi \alpha^{k+1} + \mathbf{p}^k) \quad (15)$$

这里需要求解复合算子 $\gamma\varphi + \iota_C$ 的邻近算子,依据文献[14]中的定理 12,式(15)可等价于:

$$\mathbf{b}^{k+1} = P_{C_i} \circ \text{prox}_{\gamma\varphi}(\Phi \alpha^{k+1} + \mathbf{p}^k) \quad (16)$$

式(16)中仍需求解 φ 的邻近算子 $\text{prox}_{\gamma\varphi}$, 按照邻近算子的定义(14),式(11)中第二个子问题关于 \mathbf{b} 是可分离的,可转化为 N 个一维优化问题进行求解,并且幸运的是 $\text{prox}_{\gamma\varphi}$ 具有解析表达式,详细的推导不再给出,该式非常容易实现,将其代入式(16)后:

$$b_{i,j}^{k+1} = P_{C_i} \circ \frac{\Phi \alpha^{k+1} + \mathbf{p}^k}{i,j} - \gamma + \sqrt{1 + \left[\frac{\Phi \alpha^{k+1} + \mathbf{p}^k}{i,j} - \gamma \right]^2 + 4\gamma z_{i,j}}, \quad 1 \leq i, j \leq N \quad (17)$$

式(17)中, P_{C_i} 为向凸集 C_i 的投影算子, $P_{C_i}(\cdot) = \arg \min_{y \in C_i} \|\cdot - y\|_2 = \max(\cdot, 0)$. 最终,式(11)中第二个子问题可通过式(17)求解.

本文的 Split-Bregman 迭代算法(式(11))主要由三个子步组成,后两个子步都具有解析解,无需迭代求解,而算法的复杂性主要体现在第一个子步. 第一个子步可通过线性化的 Bregman 迭代算法进行有效求解,通常其中矩阵向量的乘积可通过快速算法实现,对于正交小波变换,时间复杂度为 $O(N)$,对于紧框架系统:平移不变小波、Ridgelet、Contourlet 与 Curvlet 等变换的时间复杂度为 $O(N \log N)$,因此从而整个迭代公式(11)的求解具有较低的时间复杂度. 同时分裂 Bregman 方法收敛速度快,只需少数几次迭代即可获得很好的恢复结果. 最后完整的算法描述如下:

算法名称:稀疏性正则化的泊松噪声图像去噪

输入参数:观测图像 \mathbf{z} , 稀疏表示字典 Φ , 正则化参数 λ , 最大迭代次数 N_{SB} , 最大内迭代次数 N_{LB} , 松弛参数 γ, β ;

初始化: $\alpha^0 = 0, \mathbf{b}^0 = 0, \mathbf{p}^0 = 0$;

主迭代: For $k = 0$ to $k = N_{SB} - 1$

$\mathbf{v}^0 = 0, \tilde{\alpha}^0 = \alpha^k$, 进入子问题 1 的内部迭代;

For $n = 0$ to $n = N_{LB} - 1$

执行迭代公式(12);

End

$\alpha^{k+1} = \tilde{\alpha}^{N_{LB}-1}$;

求解子问题 2, 执行公式(17), 得到 \mathbf{b}^{k+1} ;

执行公式(11)中的最后一个子步, 更新 Bregman

参数;

End

输出: 去噪后图像 $\mathbf{u}^* = \Phi \alpha^{N_{SB}}$.

4 实验结果与分析

本节将对多幅测试图像进行仿真实验, 检验本文模型与数值算法的有效性, 并同多种现有算法进行比较, 包括文献[8]的 FITIPR 算法, 并同引言中介绍的变

换域 VST 方法进行比较,对变换后数据采用平移不变小波的软阈值去噪算法^[15],简记该算法为 VST-TIW. 实验用的测试图像包括:256 × 256 内皮细胞的微管蛋白显微图像(医学图像)、256 × 256 脊椎的 X-Ray 图像、256 × 256 的天文星系图像. 本文将从视觉效果与定量指标两个方面对去噪图像质量进行比较. 采用的定量指标包括平均绝对误差 MAE、峰值信噪比 PSNR, MAE 与 PSNR 的定义如下:

$$MAE = \sum_i \sum_j \frac{|u'_{i,j} - u_{ij}|}{MN}, PSNR = 10 \log_{10} \max(u)^2 / \sum_i \sum_j \frac{(u'_{i,j} - u_{ij})^2}{MN} \quad (18)$$

其中 u 为原始无噪图像, u' 为去噪后图像, N 和 M 为图像尺寸大小, i, j 为图像像素下标. MAE 标准能够更加适应泊松噪声色统计特性.

实验中,本文算法选取 l_1 范数作为稀疏性惩罚函数,设置 $\lambda = 9, \gamma = 15, \beta = 1, N_{LB} = 3, N_{SB} = 2$, 选用 Db6 平移不变小波作为本文算法与 VST-TIW 算法的稀疏表示字典,进行 4 层变换. 按文献^[8]的说明, FTITPR 算法选用平移不变的 Haar 小波. 实验中,本文算法每一次迭代的复杂度与 VST-TIW、FTITPR 算法相同,均为 $O(N \log N)$.

图 1, 2, 3 的 (a) 分别展示了原始参考图像,图 1, 2, 3 的 (b) 为被泊松噪声污染后的图像. 通过调整原始图像的亮度值范围可实现不同信噪比的泊松噪声,约束图 2, 3 的 (a) 的最大亮度为 30, 而图 1 (a) 的最大亮度仅为 10, 具有很低的信噪比. 为了便于观察,显示时将亮度范围拉伸至 $[0, 255]$. 图 1, 2, 3 的 (c) 则显示了加入的泊松噪声,从中可以看出,泊松噪声呈现出了与原信号相关的结构性,是一种信号依赖的噪声. 图 1, 2, 3 的 (d-f) 分别给出了 FTITPR、VST-TIW 以及本文算法的去噪结果. 对于彩色图像图 3 (a), 各算法对三个通道(R、G、B) 分别进行去噪处理. FTITPR 产生了过于平滑的估计,丢

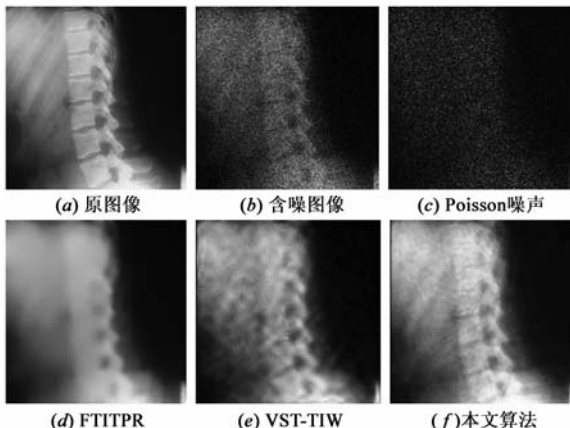


图1 不同泊松去噪算法的实验结果比较(X-Ray图像, 亮度值 ≤ 10)

失了太多几何结构信息. 由于 Anscombe VS 变换只有当每个像素的平均光子数较大时,才能发挥效用,光子数降低时性能随之下降,当中光子数小于 20 时则退化尤为严重. 实验结果也验证了这一结论,图 1 (e) 的结果较差,背景处出现了很多伪迹,而图 2, 3 的 (e) 则得到了有效改善. 本文算法保持了原图像中重要的几何结构特征,在去噪和结构重建间保持了较好的平衡. 表 1 给出了各算法去噪结果的定量指标. 可以看出,本文算法在去噪图像的视觉效果与定量指标方面都展现出了更为优异的结果,与 VST-TIW、FTITPR 相比,本文算法的 PSNR 大约提高了 1dB.

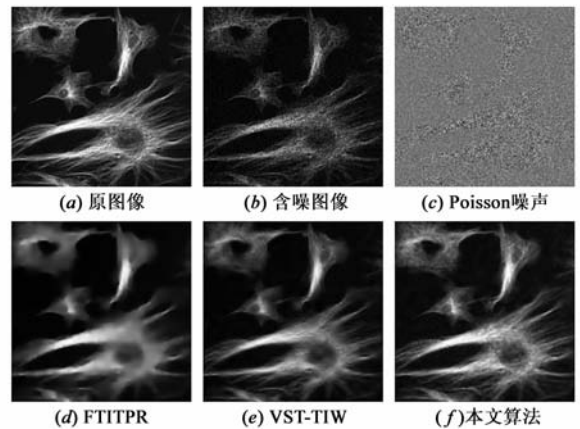


图2 不同泊松去噪算法的实验结果比较(共焦显微镜图像, 亮度值 ≤ 30)

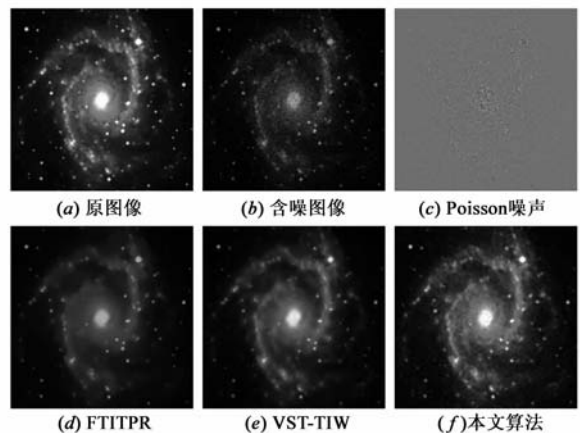


图3 不同泊松去噪算法的实验结果比较(天文图像, 亮度值 ≤ 30)

表 1 各算法去噪性能的定量指标比较

图像	最大亮度级	性能指标	退化图像	FTITPR	VST-TIW	本文算法
图 1 (a)	10	MAE	1.7965	0.6249	0.7570	0.4750
		PSNR(dB)	20.5535	29.0950	26.8927	31.5921
图 2 (a)	30	MAE	1.9238	1.1581	1.2017	1.0699
		PSNR(dB)	21.2883	25.1512	25.2084	26.2150
图 3 (a)	30	MAE	0.9055	0.5285	0.5455	0.4563
		PSNR(dB)	23.3815	27.9656	27.8914	28.9721

5 结论

本文在 Bayesian-MAP 框架下,采用了负 log 泊松似然函数作为保真项,应用图像在冗余字典下稀疏性约束作为正则项,建立了稀疏性正则化的泊松噪声图像去噪算法,无需进行 VS 变换,能够直接处理泊松噪声,并采用 Split-Bregman 迭代算法进行高效求解.对一系列图像进行了仿真测试,并同多种算法进行了比较,实验结果表明:由于本文的保真项能够自适应于泊松噪声的统计特性,产生了较好的去噪结果.本文的算法可扩展应用于 CCD 噪声模型,处理泊松与高斯的复合噪声,将在后续的论文中作进一步研究.

参考文献:

- [1] F J Anscombe. The transformation of Poisson, binomial and negative-binomial data [J]. *Biometrika*, 1948, 35 (3): 246 - 254.
- [2] 刘志刚, 黄慧汇. 基于不同预处理方法的多小波暂态信号去噪 [J]. *电子学报*, 2004, 32(6): 1054 - 1056.
Liu Zhi-gang, Huang Hui-hui. Denoising of transient signals based on multiwavelets with different pre-processing methods [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2004, 32(6): 1054 - 1056.
- [3] 胡英, 杨杰, 周越. 基于多尺度 Wiener 滤波器的分形噪声滤波 [J]. *电子学报*, 2003, 31(4): 560 - 563.
Hu Ying, Yang Jie, Zhou Yue. Multiscale Wiener filter for the estimation of signal embedded in fractal noise [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2003, 31(4): 560 - 563. (in Chinese)
- [4] B Zhang, M Fadili, J-L Starck. Wavelets, ridgelets and curvelets for poisson noise removal [J]. *IEEE Trans Image Process*, 2008, 17(7): 1093 - 1108.
- [5] E D. Kolaczyk. Nonparametric estimation of intensity maps using Haar wavelets and Poisson noise characteristics [J]. *The Astrophysical Journal*, 2000, 534(1): 490 - 505.
- [6] A Bijaoui, G Jammal. On the distribution of the wavelet coefficient for a Poisson noise [J]. *Signal Process*, 2001, 81(9): 1789 - 1800.
- [7] R Nowak, E Kolaczyk. A statistical multiscale framework for poisson inverse problems [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2000, 46(5): 1811 - 1825.
- [8] R Willett, R Nowak. Fast multiresolution photon-limited image reconstruction [A]. *Proc IEEE Int Sym Biomedical Imaging (ISBI '04)* [C]. Arlington: IEEE Press, 2004. 1192 - 1195.
- [9] S Setzer. Split Bregman algorithm, Douglas-Rachford splitting and frame shrinkage [A]. *Lecture Notes In Computer Science* [C]. Voss: Springer-Verlag, 2009. 5567. 464 - 476.
- [10] 蔡泽民, 赖剑煌. 一种基于超完备字典学习的图像去噪方法 [J]. *电子学报*, 2009, 37(2): 347 - 350.
Cai Ze-min, Lai Jian-huang. An over-complete learned dictio-

nary-based image de-noising method [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2009, 37(2): 347 - 350. (in Chinese)

- [11] Stanley Osher, Martin Burger, et al. An iterative regularization method for total variation-based image restoration [J]. *Multi-scale Model, Simul*, 2005, 4(2): 460 - 489.
- [12] S Osher, Y Mao, et al. Fast linearized Bregman iteration for compressive sensing and sparse denoising [J]. *Communications in Mathematical Sciences*, 2010, 8(1): 93 - 111.
- [13] M Fadili, J-L Starck, F. Murtagh. Inpainting and zooming using sparse representations [J]. *The Computer Journal*, 2009, 52 (1): 64 - 79.
- [14] P L Combettes, J- Pesquet. A Douglas-Rachford splitting approach to nonsmooth convex variational signal recovery [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2007, 1 (4): 564 - 574.
- [15] Starck, J-L, Fadili, M, Murtagh, F. The undecimated wavelet decomposition and its reconstruction [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2007, 16(2): 297 - 309.

作者简介:



孙玉宝 男,生于 1983 年 9 月,南京理工大学博士研究生,主要研究领域为图像的稀疏表示与建模,图像去噪与恢复,作战仿真.
E-mail: syb8692833@126.com



韦志辉(通信作者) 男,生于 1963 年,教授,博士生导师,主要研究领域为基于人类感知的稀疏编码理论及应用,医学与遥感图像处理.
E-mail: gswwei@mail.njust.edu.cn



吴敏 女,生于 1973 年,南京理工大学在读博士研究生,南京军区南京总医院医学工程科工程师,主要研究领域为图像处理,EEG 信号的自动检测与分析.
E-mail: njzywm@163.com

肖亮 男,生于 1976 年,副教授,主要研究方向为变分偏微分方程在图像处理中的应用,三维医学图像处理等.
E-mail: txiaoliang@163.com